

No.3 合成写像と逆写像

この回のゴール

- 合成写像を作り，結合法則が成り立つことを説明できる。
- 合成写像が単射・全射になる条件を示せる。
- 逆写像が存在するための条件（全単射）を述べ，具体的な写像の逆写像を求められる。
- 左逆写像・右逆写像と単射・全射の関係を説明できる。

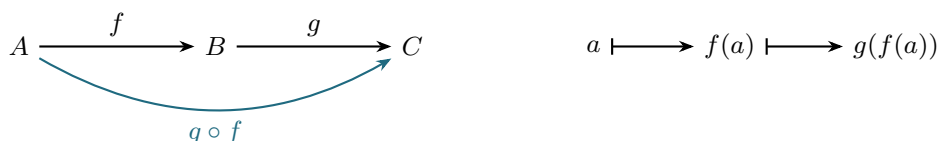
■ 1. 合成写像

定義 1 合成写像

2 つの写像 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ に対して,

$$g \circ f: A \rightarrow C, \quad (g \circ f)(a) = g(f(a))$$

を f と g の**合成写像**（または**合成**）という。



$g \circ f$ は「先に f , 次に g 」である。右に書いたものから先に施すことに注意しよう ($g(f(a))$ の書き方に合わせている)。合成するには, f の終域と g の定義域がつながっている必要がある。(f の値域が g の定義域に含まれていれば, f の終域をせまくして合成を考えることもある。)

例 1

(1) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$ とすると,

$$(g \circ f)(x) = g(x + 1) = (x + 1)^2, \quad (f \circ g)(x) = f(x^2) = x^2 + 1.$$

一般に $g \circ f \neq f \circ g$ である (合成の順番は入れかえられない)。

(2) 高校の合成関数 $g(f(x))$ は合成写像の特別な場合である。その微分が連鎖律 $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x)$ である (分野「微分積分」第 1 章 No.3 定理 2)。

(3) 行列 A, B が定める線形写像 $x \mapsto Ax$, $y \mapsto By$ の合成は $x \mapsto B(Ax) = (BA)x$ で, 行列の積 BA が定める線形写像である。行列の積の定義は, 線形写像の合成に合わせて決められている (分野「線形代数」第 5 章 No.4)。

定理 1 合成の性質

写像 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, $h: C \rightarrow D$ について,

- (1) 結合法則: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
- (2) 恒等写像: $f \circ \text{id}_A = f$, $\text{id}_B \circ f = f$

【証明】 (1) 両辺とも A から D への写像で, 任意の $a \in A$ について

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a))), \quad ((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))).$$

よって No.1 定義 2 より等しい. (2) も同様に, 両辺の値を比べればよい. □

結合法則があるので, $h \circ g \circ f$ とかっこなしで書いてよい. 行列の積の結合法則 $(AB)C = A(BC)$ も, この定理から説明できる.

■ 2. 合成と単射・全射**定理 2**

写像 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ について,

- (1) f, g がともに単射ならば, $g \circ f$ も単射.
- (2) f, g がともに全射ならば, $g \circ f$ も全射.
- (3) f, g がともに全単射ならば, $g \circ f$ も全単射.
- (4) $g \circ f$ が単射ならば, f は単射.
- (5) $g \circ f$ が全射ならば, g は全射.

【証明】 (1) $g(f(a)) = g(f(a'))$ とすると, g が単射なので $f(a) = f(a')$, f が単射なので $a = a'$.

(2) は練習問題 3. (3) は (1), (2) から従う.

(4) $f(a) = f(a')$ とすると, 両辺に g を施して $g(f(a)) = g(f(a'))$. $g \circ f$ が単射なので $a = a'$.

(5) $c \in C$ を任意にとる. $g \circ f$ が全射なので $g(f(a)) = c$ となる $a \in A$ がある. $b = f(a) \in B$ とおけば $g(b) = c$. □

注意

(4) で g が単射, (5) で f が全射とは限らない. $A = C = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $f(1) = 1$, $g(1) = g(2) = 1$ とすると, $g \circ f = \text{id}_A$ は全単射だが, f は全射でなく, g は単射でない. 「最初の写像は単射」「最後の写像は全射」と, 位置で覚えるとよい.

■ 3. 逆写像

定義 2 逆写像

写像 $f: A \rightarrow B$ に対して, 写像 $g: B \rightarrow A$ が

$$g \circ f = \text{id}_A \quad \text{かつ} \quad f \circ g = \text{id}_B$$

をみたすとき, g を f の逆写像といい, f^{-1} で表す.

$g \circ f = \text{id}_A$ は「 f で送ってから g で戻すと元にもどる」こと, $f \circ g = \text{id}_B$ は「 g で送ってから f で戻すと元にもどる」ことである. 両方の条件が必要である (片方だけだと, 次の節の左逆写像・右逆写像になる).

定理 3 逆写像の存在

写像 $f: A \rightarrow B$ について,

- (1) f の逆写像が存在する $\iff f$ は全単射.
- (2) 逆写像は, 存在すればただ 1 つである.

【証明】(1) $(\Rightarrow)$ $g \circ f = \text{id}_A$ は単射なので, 定理 2 (4) より f は単射. $f \circ g = \text{id}_B$ は全射なので, 定理 2 (5) より f は全射.

$(\Leftarrow)$ f が全単射なら, 各 $b \in B$ に対して $f(a) = b$ となる $a \in A$ が, 全射なので少なくとも 1 つ, 単射なので高々 1 つ, つまりただ 1 つある. この a を $g(b)$ と定めると, $g: B \rightarrow A$ は写像になる. 定め方から $f(g(b)) = b$. また $a \in A$ に対して, $g(f(a))$ は「 f で $f(a)$ に行く A の要素」なので a 自身である. よって $g \circ f = \text{id}_A$, $f \circ g = \text{id}_B$.

(2) g, g' がともに逆写像なら, 定理 1 を使って

$$g = g \circ \text{id}_B = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = \text{id}_A \circ g' = g'.$$

□

例 2

- (1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$ の逆写像は $f^{-1}(y) = \frac{y-2}{3}$ (No.2 例題 1 (1) で解いた式).
- (2) $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $x \mapsto e^x$ の逆写像は $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.
- (3) $\sin$ を $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ と制限した全単射の逆写像が $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- (4) 正方行列 A が定める線形写像が全単射であることと, A が逆行列をもつことは同値で, 逆写像は $\mathbf{y} \mapsto A^{-1}\mathbf{y}$ (分野「線形代数」第 1 章 No.3).

逆写像を求めるには, $y = f(x)$ を x について解けばよい. ただし, 定義域・終域を確かめて, 全単射であることを先に (または同時に) 確認する.

例題 1

$f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ の逆写像を求めよ.

【解答】 No.2 練習問題 2 で, f は全単射であり, $y = f(x)$ を解くと $x = \frac{y+1}{y-1}$ となることを見た. よっ

て $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}$, すなわち $f^{-1} = f$ である. 実際, 分母・分子に $x-1$ を掛けて

$$f(f(x)) = \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{(x+1) + (x-1)}{(x+1) - (x-1)} = \frac{2x}{2} = x$$

と確かめられる. ($f \circ f = \text{id}$ となる写像を**対合**という. $x \mapsto -x$ や $x \mapsto \frac{1}{x}$ もその例である.)

定理 4

$f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ が**全単射**ならば,

$$(1) (f^{-1})^{-1} = f \quad (2) (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

【証明】 (1) 逆写像の定義の2つの式は, f と f^{-1} の役割を入れかえても同じ形なので, f は f^{-1} の逆写像である.

(2) 定理1を使うと,

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \text{id}_B \circ f = f^{-1} \circ f = \text{id}_A.$$

同様に $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \text{id}_C$. 定理3 (2) (一意性) より結論を得る. $\square$

(2) で順番が逆になるのは, 「靴下をはいてから靴をはいた」ら, 「靴を脱いでから靴下を脱ぐ」のと同じである. 行列の $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ もこの形である.

f^{-1} の2つの意味

No.1 の逆像 $f^{-1}(D)$ は**どんな写像にも**定義されるが, 逆写像 f^{-1} は**全単射のときだけ**存在する. f が全単射のときは, 「 D の逆像」と「逆写像 f^{-1} による D の像」は同じ集合になるので, 記号がぶつかっても困らない. また, 逆写像 $f^{-1}(x)$ は $\frac{1}{f(x)}$ とはまったく別物である ($\sin^{-1} x$ は $\arcsin x$ の意味で, $\frac{1}{\sin x}$ ではない).

■ 4. 左逆写像と右逆写像

逆写像の2つの条件のうち, 片方だけをみtus写像を考える.

定理 5

$A \neq \emptyset$ とし, $f: A \rightarrow B$ を写像とする.

(1) f が単射 $\iff g \circ f = \text{id}_A$ となる $g: B \rightarrow A$ が存在する. (g を**左逆写像**という.)

(2) f が全射 $\iff f \circ h = \text{id}_B$ となる $h: B \rightarrow A$ が存在する. (h を**右逆写像**という.)

【証明】 ($\Leftarrow$) はどちらも定理2 (4), (5) から従う (id_A は単射, id_B は全射).

(1) ($\Rightarrow$) $A \neq \emptyset$ なので $a_0 \in A$ を1つとっておく. $b \in B$ に対して, $b \in f(A)$ なら, $f(a) = b$ となる a は (単射なので) ただ1つなので $g(b) = a$ とし, $b \notin f(A)$ なら $g(b) = a_0$ とする. すると $g(f(a)) = a$ である.

(2) ($\Rightarrow$) f が全射なので, 各 $b \in B$ について $f^{-1}(\{b\})$ は空でない. そこで, 各 b について $f^{-1}(\{b\})$ から要素を1つずつ選んで $h(b)$ とすれば, $f(h(b)) = b$ となる. $\square$

例 3

$f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ は全射である. 右逆写像として $h(y) = \sqrt{y}$ がとれるが, $h(y) = -\sqrt{y}$ でもよいし, 「 y が有理数なら $\sqrt{y}$, 無理数なら $-\sqrt{y}$ 」のように混ぜてもよい. 右逆写像は一般にたくさんある. f は単射でないので, 左逆写像はない.

(2) の証明にひそむ「選択公理」

(2) の証明の「各 b について 1 つずつ選ぶ」は, B が有限集合なら 1 つずつ選べばよいので問題ない. また例 3 のように「 $\sqrt{y}$ を選ぶ」といった**選び方の規則**を具体的に書ければ, それでもよい. しかし, B が無限集合で, 選び方の規則が書けないときにも「いっせいに選べる」ことは, 実は他の基本的なルールからは導けず, **選択公理**という公理として認めて使っている. 選択公理については第 4 章 No.3 で詳しく扱う.

コラム: 全単射 $A \rightarrow A$ の集まりは「群」になる

集合 A から A 自身への全単射全体を $S(A)$ とする. 定理 2 (3), 定理 3, 定理 1 から, $S(A)$ は合成について閉じていて, 結合法則が成り立ち, id_A があり, 各要素に逆写像がある. この 4 つの性質をもつ構造を**群**という. $A = \{1, 2, \dots, n\}$ のときの $S(A)$ は**対称群** S_n と呼ばれ, 行列式の定義に使われる置換 (分野「線形代数」第 3 章 No.1) の集まりにほかならない. 群については分野「代数学」で学び, 対称群は分野「代数学」第 4 章 No.2 で扱う.

■ 練習問題

- $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^2 + 1$ とする. $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ を求めよ.
- 次の写像が全単射であることを確かめ, 逆写像を求めよ.
 - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$
 - $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{x}$
 - $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$, $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$
- 定理 2 (2) を示せ.
- $f: A \rightarrow B$, $g, h: B \rightarrow C$ とする. f が全射で $g \circ f = h \circ f$ ならば, $g = h$ であることを示せ. また, f が全射でないときは成り立たない例をあげよ.
- $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{a, b\}$ を $f(1) = f(2) = a$, $f(3) = f(4) = b$ で定める. f の右逆写像は何個あるか. また, 左逆写像はあるか.
- (考えてみよう) 写像 $f: A \rightarrow A$ が $f \circ f = f$ をみたすとする.
 - f が単射ならば $f = \text{id}_A$ であることを示せ.
 - f が全射ならば $f = \text{id}_A$ であることを示せ.
 - $f \neq \text{id}_A$ で $f \circ f = f$ となる $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ の例をあげよ.

■ 練習問題の解答

1. $(g \circ f)(x) = (2x - 1)^2 + 1 = 4x^2 - 4x + 2$, $(f \circ g)(x) = 2(x^2 + 1) - 1 = 2x^2 + 1$, $(f \circ f)(x) = 2(2x - 1) - 1 = 4x - 3$.
2. (1) $y = x^3 + 1$ を解くと $x = \sqrt[3]{y-1}$ で, 任意の $y \in \mathbb{R}$ に対してただ 1 つ定まるので全単射.
 $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}$.
(2) $\frac{1}{x} = \frac{1}{x'}$ なら $x = x'$. $y > 0$ に対して $x = \frac{1}{y} > 0$ で $f(x) = y$. $f^{-1} = f$ (対合).
(3) $f'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0$ なので単射 (No.2 定理 1). $y \in (0, 1)$ に対して $y = \frac{1}{1+e^{-x}}$ を解くと,
 $e^{-x} = \frac{1-y}{y} > 0$ より $x = \log \frac{y}{1-y}$ がとれるので全射. $f^{-1}(y) = \log \frac{y}{1-y}$. (f はシグモイド関数と呼ばれ, 機械学習でよく使われる. 逆写像はロジット関数と呼ばれる.)
3. $c \in C$ を任意にとる. g が全射なので $g(b) = c$ となる $b \in B$ がある. f が全射なので $f(a) = b$ となる $a \in A$ がある. このとき $(g \circ f)(a) = g(b) = c$.
4. $b \in B$ を任意にとる. f が全射なので $b = f(a)$ となる a があり, $g(b) = g(f(a)) = h(f(a)) = h(b)$.
よって $g = h$.
全射でないときの例: $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, 2\}$, $f(1) = 1$, $g = \text{id}_B$, $h(1) = 1$, $h(2) = 1$ とすると, $g \circ f = h \circ f$ (どちらも $1 \mapsto 1$) だが $g(2) \neq h(2)$. (同様に, g が単射なら $g \circ f_1 = g \circ f_2 \Rightarrow f_1 = f_2$ が成り立つ. 単射・全射は「打ち消せる」写像なのである.)
5. 右逆写像 h は, $h(a) \in f^{-1}(\{a\}) = \{1, 2\}$, $h(b) \in f^{-1}(\{b\}) = \{3, 4\}$ をみたせばよいので, $2 \times 2 = 4$ 個. f は単射でない ($f(1) = f(2)$) ので, 定理 5 (1) より左逆写像はない.
6. (a) 任意の $a \in A$ について $f(f(a)) = f(a)$. f は単射なので $f(a) = a$. よって $f = \text{id}_A$.
(b) 任意の $a \in A$ をとる. f は全射なので $a = f(b)$ となる b があり, $f(a) = f(f(b)) = f(b) = a$.
よって $f = \text{id}_A$.
(c) $f(x, y) = (x, 0)$ (x 軸への正射影). $f(f(x, y)) = f(x, 0) = (x, 0) = f(x, y)$. 一般に $f \circ f = f$ となる写像を**冪等** (べき等) な写像という. 行列 P で $P^2 = P$ となるものは射影行列と呼ばれる (分野「線形代数」第 7 章 No.4).